



# CORSO DI MATEMATICA

MARIOLINA CAPPADONNA  
PIERPAOLO DESTRI

**1**

PER L'ISTRUZIONE E LA FORMAZIONE  
PROFESSIONALE

Edizione **OPENSCHOOL**

<b>1</b>	<b>LIBRODITESTO</b>
<b>2</b>	<b>E-BOOK+</b>
<b>3</b>	<b>RISORSEONLINE</b>
<b>4</b>	<b>PIATTAFORMA</b>

# HOEPLI



MARIOLINA CAPPADONNA

PIERPAOLO DESTRI

# Corso di matematica

Per l'Istruzione  
e la Formazione Professionale

## VOLUME 1



EDITORE ULRICO HOEPLI MILANO

**Copyright © Ulrico Hoepli Editore S.p.A. 2019**

Via Hoepli 5, 20121 Milano (Italy)

tel. +39 02 864871 – fax +39 02 8052886

e-mail [hoepli@hoepli.it](mailto:hoepli@hoepli.it)

**[www.hoepli.it](http://www.hoepli.it)**



Tutti i diritti sono riservati a norma di legge  
e a norma delle convenzioni internazionali

# Indice

Presentazione XII

## RELAZIONI E FUNZIONI, ARITMETICA E ALGEBRA, DATI E PREVISIONI

<b>1</b>	<b>Insiemi</b>	2
1.1	Gli insiemi e i simboli	2
1.2	Rappresentazione di un insieme	2
1.3	Insiemi finiti, infiniti	3
1.4	L'insieme universo	3
1.5	Le operazioni tra insiemi e loro proprietà	4
	Intersezione	4
	Unione	5
	Differenza	5
	Insieme complementare	6
	Prodotto cartesiano	6
	Mappa	8
	Verifica delle abilità	9
	Verso la prova INVALSI	12
	Verifica delle abilità - BES	13
<b>2</b>	<b>Numeri</b>	14
2.1	I numeri naturali	14
	Operazioni tra numeri naturali	15
	ADDIZIONE	15
	PROPRIETÀ DELL'ADDIZIONE	15
	SOTTRAZIONE	16
	PROPRIETÀ DELLA SOTTRAZIONE	16
	MOLTIPLICAZIONE	16
	PROPRIETÀ DELLA MOLTIPLICAZIONE	17
	ELEVAMENTO A POTENZA	17
	DIVISIONE	18
	ESTRAZIONE DAL SEGNO DI RADICE QUADRATA	18
	PROPRIETÀ DELLE POTENZE	18
	ESPRESSIONI E PROBLEMI	19
	Multipli e divisori	21
	Criteri di divisibilità	21
	mcm e MCD	22
	Sistemi di numerazione	25

	SISTEMA CON BASE DIECI	25
	SISTEMI CON ALTRE BASI	25
	CAMBIAMENTO DI BASE: DAL SISTEMA DI BASE $n$ AL SISTEMA DECIMALE	26
	CAMBIAMENTO DI BASE: DAL SISTEMA DECIMALE AL SISTEMA DI BASE $n$	26
<b>2.2</b>	<b>Frazioni</b>	27
	Frazioni equivalenti	28
	Semplificazione di una frazione	30
	Riduzione di più frazioni al minimo comun denominatore	31
	Le operazioni con le frazioni	32
	ADDIZIONE E SOTTRAZIONE	32
	MOLTIPLICAZIONE	33
	DIVISIONE	34
	ELEVAMENTO A POTENZA	35
	ESTRAZIONE DAL SEGNO DI RADICE QUADRATA	36
	LE ESPRESSIONI CON LE FRAZIONI	37
	I numeri decimali	38
	NUMERI DECIMALI FINITI E FRAZIONI DECIMALI	39
	FRAZIONE GENERATRICE DI UN NUMERO DECIMALE PERIODICO SEMPLICE	40
	FRAZIONE GENERATRICE DI UN NUMERO DECIMALE PERIODICO MISTO	40
	OPERAZIONI CON I NUMERI DECIMALI	41
	NOTAZIONE SCIENTIFICA	44
	Proporzioni	45
	Proprietà delle proporzioni numeriche	46
	Grandezze	48
	Grandezze proporzionali	48
	Percentuali	50
<b>2.3</b>	<b>Numeri con segno</b>	52
	I numeri relativi	52
	Operazioni	53
	ADDIZIONE	53
	SOTTRAZIONE	55
	MOLTIPLICAZIONE	56
	ELEVAMENTO A POTENZA CON ESPONENTE INTERO POSITIVO	58
	DIVISIONE	59
	ELEVAMENTO A POTENZA CON ESPONENTE INTERO NEGATIVO	59
	ESPRESSIONI	60
<b>2.4</b>	<b>Numeri reali</b>	62
<b>2.5</b>	<b>Grandezze decimali</b>	63
	Grandezze	63
	Sistema Internazionale di misura - SI (esse <i>i</i> )	64
	Unità di misura di lunghezza - Multipli e sottomultipli del metro	65
	Unità di misura di massa - Multipli e sottomultipli del chilogrammo	66
	Unità di misura di superficie - Multipli e sottomultipli del metro quadrato	67
	Unità di misura di volume - Multipli e sottomultipli del metro cubo	68
	Peso specifico	69
	<b>Mappa</b>	70
	Verifica delle abilità	71
	Verso la prova INVALSI	119
	Verifica delle abilità - BES	120

<b>3</b>	<b>Calcolo letterale</b>	125
<b>3.1</b>	<b>Monomi</b>	125
	Espressioni letterali	125
	Valore numerico di un'espressione letterale	125
	Monomi	126
	Valore numerico di un monomio	127
	Grado di un monomio intero	127
	Monomi simili, uguali, opposti	128
<b>3.2</b>	<b>Operazioni tra monomi</b>	129
	Addizione e sottrazione	129
	Moltiplicazione tra monomi	130
	Elevamento a potenza di un monomio	130
	Divisione tra due monomi	131
	Espressioni algebriche letterali contenenti monomi	132
<b>3.3</b>	<b>Polinomi</b>	133
	I polinomi	133
	Valore numerico di un polinomio	133
	Riduzione di un polinomio a forma normale	134
	Vari tipi di polinomi	134
	Grado di un polinomio	135
<b>3.4</b>	<b>Operazioni con i polinomi</b>	137
	Addizione tra polinomi	137
	Sottrazione tra polinomi	138
	Moltiplicazione tra un monomio e un polinomio	139
	Divisione tra un polinomio e un monomio	140
	Moltiplicazione tra due polinomi	140
<b>3.5</b>	<b>Prodotti notevoli</b>	141
	Quadrato di un binomio	141
	Quadrato di un trinomio	142
	Cubo di un binomio	143
	Prodotto della somma di due termini per la loro differenza	144
	Espressioni contenenti polinomi	145
	Divisione tra polinomi	146
	Regola di Ruffini	148
<b>3.6</b>	<b>Scomposizione di un polinomio</b>	150
	Massimo Comun Divisore di più monomi	150
	Scomposizione di un polinomio	151
	Scomposizione di un polinomio mediante raccoglimento a fattor comune	151
	Scomposizione di un trinomio che si presenta come sviluppo del quadrato di un binomio	152
	Scomposizione di un quadrinomio che si presenta come sviluppo del cubo di un binomio	153
	Scomposizione della differenza di due quadrati	154
	Scomposizione parziale di un polinomio	155
	Divisibilità di un polinomio per un binomio di primo grado contenenti la stessa lettera	156
	Scomposizione di un polinomio mediante il teorema del resto e la regola di Ruffini	156
	Scomposizione di un particolare trinomio di secondo grado	158
	<b>Mappa</b>	160
	Verifica delle abilità	164
	Verso la prova INVALSI	185
	Verifica delle abilità - BES	186

<b>4</b>	<b>Frazioni algebriche</b>	190
<b>4.1</b>	<b>Frazioni algebriche</b>	190
	Frazioni algebriche equivalenti	190
	Semplificazione di una frazione algebrica	191
<b>4.2</b>	<b>Operazioni con le frazioni algebriche</b>	192
	Minimo comune multiplo di più monomi	192
	Minimo comune multiplo di più polinomi	193
	Riduzione di più frazioni algebriche allo stesso denominatore	194
	Addizione e sottrazione tra frazioni algebriche	195
	Moltiplicazione tra frazioni algebriche	196
	Divisione tra due frazioni algebriche	197
	Elevamento a potenza di una frazione algebrica	198
	Espressioni contenenti frazioni algebriche	200
	<b>Mappa</b>	201
	Verifica delle abilità	202
	Verifica delle abilità - BES	206
<b>5</b>	<b>Equazioni</b>	207
<b>5.1</b>	<b>Equazioni</b>	207
	Equazioni numeriche intere di primo grado	207
	Principi di equivalenza delle equazioni	208
	Grado di un'equazione	208
	Risoluzione di un'equazione numerica intera di primo grado	209
	Problemi lineari in un'incognita	209
<b>5.2</b>	<b>Equazioni numeriche intere di secondo grado in un'incognita</b>	211
	Equazioni numeriche intere di secondo grado monomie	211
	Equazioni numeriche intere di secondo grado pure	212
	Equazioni numeriche intere di secondo grado spurie	214
	Equazioni numeriche intere di secondo grado complete	215
	Problemi di secondo grado in un'incognita	217
	<b>Mappa</b>	219
	Verifica delle abilità	220
	Verso la prova INVALSI	231
	Verifica delle abilità - BES	232
<b>6</b>	<b>Sistemi di equazioni</b>	234
<b>6.1</b>	<b>I sistemi numerici interi di primo grado</b>	234
	Sistemi di equazioni	234
	Sistemi determinati, indeterminati, impossibili	234
	Sistemi numerici interi di primo grado in due incognite	234
	Risoluzione di un sistema di primo grado di due equazioni in due incognite	236
	<b>METODO DELLA SOSTITUZIONE</b>	236
	<b>METODO DEL CONFRONTO</b>	238
	<b>METODO DELLA RIDUZIONE</b>	239
	Problemi lineari in due incognite	241
	<b>Mappa</b>	243

	Verifica delle abilità	244
	Verifica delle abilità - BES	247
<b>7</b>	<b>Disequazioni</b>	248
<b>7.1</b>	<b>Disequazioni</b>	248
	Le disuguaglianze e loro proprietà	248
	Disequazioni	249
	Principi di equivalenza	250
	Risoluzione di una disequazione di primo grado	251
<b>7.2</b>	<b>Disequazioni di secondo grado</b>	252
	$\Delta > 0$	252
	$\Delta = 0$	254
	$\Delta < 0$	256
	<b>Mappa</b>	257
	Verifica delle abilità	258
	Verso la prova INVALSI	262
	Verifica delle abilità - BES	264
<b>8</b>	<b>Piano cartesiano</b>	266
<b>8.1</b>	<b>Punti e rette nel piano cartesiano</b>	266
	Sistema di coordinate su una retta	266
	Distanza tra due punti della retta reale	266
	Punto medio di un segmento sulla retta reale	267
	Coordinate di un punto	267
	Segno delle coordinate di un punto	269
	Distanza tra due punti di un piano cartesiano	270
	Punto medio di un segmento nel piano cartesiano	271
<b>8.2</b>	<b>Le funzioni</b>	272
	Funzioni lineari	273
	Funzione di proporzionalità diretta	276
	Funzione di proporzionalità inversa	276
	Funzione di proporzionalità quadratica	277
	<b>Mappa</b>	280
	Verifica delle abilità	281
	Verso la prova INVALSI	285
	Verifica delle abilità - BES	293
<b>9</b>	<b>Statistica e Probabilità</b>	294
<b>9.1</b>	<b>Cenni di statistica</b>	294
	La Statistica	294
	Rappresentazioni grafiche	294
	LA RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA	294
	GLI ORTOGRAMMI	296
	I DIAGRAMMI A TORTA	297
	I CARTOGRAMMI	299

	Indici di posizione	300
<b>9.2</b>	<b>Cenni di calcolo delle probabilità</b>	301
	La probabilità	301
	Operazioni fra eventi	302
	NEGAZIONE DI UN EVENTO	302
	EVENTI COMPATIBILI - EVENTI INCOMPATIBILI	303
	INTERSEZIONE DI EVENTI	303
	UNIONE DI EVENTI	304
	Frequenza di un evento	305
	Probabilità di un evento	306
	Differenza tra frequenza e probabilità	307
	Teoremi sul calcolo delle probabilità	308
	<b>Mappa</b>	312
	Verifica delle abilità	314
	Verso la prova INVALSI	322
	Verifica delle abilità - BES	327

## GEOMETRIA

<b>10</b>	<b>Geometria Euclidea</b>	330
<b>10.1</b>	<b>I fondamenti della geometria piana</b>	330
	Enti primitivi	330
	Rette, semirette e segmenti	331
	Confronto tra segmenti	332
	Somma e differenza di segmenti	333
	Multipli e sottomultipli di un segmento	334
	Piani, semipiani	334
	Angoli	335
	Confronto tra angoli	336
	Angoli consecutivi, adiacenti, opposti al vertice	336
	Somma e differenza di angoli	337
	Multipli e sottomultipli di un angolo	338
	Bisettrice di un angolo	339
	Angolo piatto, angolo retto, angolo giro	339
	Angoli complementari, angoli supplementari, angoli esplementari	340
	Angoli acuti, angoli ottusi	340
	Misura dell'ampiezza di un angolo	341
	Spezzate	343
	Poligoni	343
	I triangoli e la loro classificazione	345
	Altezze, mediane e bisettrici di un triangolo	346
	Congruenze	347
	Proprietà dei triangoli isosceli	348
	Primo teorema dell'angolo esterno	349
	Lati e angoli a essi opposti in un triangolo	349
	Disuguaglianze tra i lati di un triangolo	350

Rette parallele	350
Unicità della parallela condotta da un punto esterno a una retta	351
Rette tagliate da una trasversale	351
Criterio di parallelismo delle rette	352
Unicità della perpendicolare condotta da un punto esterno a una retta	352
Punti simmetrici rispetto a una retta	352
Teoremi sulle rette parallele, sulle rette perpendicolari e sulle rette oblique	353
Secondo teorema dell'angolo esterno	354
Somma degli angoli interni di un triangolo	354
Congruenza dei triangoli rettangoli	354
Triangolo rettangolo con un angolo di $60^\circ$	355
Quadrilateri	355
Il parallelogramma	356
PROPRIETÀ DEI PARALLELOGRAMMI	356
CRITERI DEI PARALLELOGRAMMI	357
Il rettangolo	357
Il rombo	358
CRITERI DEI ROMBI	358
Il quadrato	359
CRITERI DEI QUADRATI	359
Il trapezio	359
PROPRIETÀ DEI TRAPEZI ISOSCELI	360
CRITERI DEI TRAPEZI ISOSCELI	360
Rette parallele tagliate da due trasversali	360
Il teorema della corrispondenza di Talete	361
La corrispondenza di Talete e i triangoli	362
Punti notevoli di un triangolo	363
Baricentro	363
Circocentro	363
Incentro	364
Ortocentro	365
Superfici equivalenti	365
Figure equicomposte	366
Area di un poligono	367
AREA DI UN RETTANGOLO	367
AREA DI UN QUADRATO	368
AREA DI UN PARALLELOGRAMMA	368
AREA DI UN ROMBO	369
AREA DI UN TRIANGOLO QUALSIASI	369
AREA DI UN TRAPEZIO	370
Teorema di Pitagora	371
PITAGORA DI SAMO	371
TERNA PITAGORICA	372
Primo teorema di Euclide	372
EUCLIDE DI ALESSANDRIA	372
Secondo teorema di Euclide	374
Applicazioni dei teoremi di Pitagora e di Euclide ai poligoni	375
RETTANGOLO	375
QUADRATO	376

PARALLELOGRAMMA	376
ROMBO	377
TRIANGOLO EQUILATERO	377
TRIANGOLO ISOSCELE	378
TRIANGOLO RETTANGOLO CON UN ANGOLO DI $60^\circ$	378
TRIANGOLO RETTANGOLO CON UN ANGOLO DI $45^\circ$	378
TRAPEZIO	379
TRAPEZIO RETTANGOLO	379
Triangoli simili	379
Criteri di similitudine dei triangoli	380
Perimetri e aree di triangoli simili	380
Il triangolo aureo	380
Poligoni simili	381
Teoremi di Euclide con la similitudine	382
Circonferenza e cerchio	383
Archi e angoli	384
Angoli corrispondenti	385
Angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco	386
Corde	386
Teoremi sulle corde	387
Bisettrice di un angolo alla circonferenza	388
Posizioni reciproche di una retta e di una circonferenza	388
Segmenti di tangente	389
Posizioni reciproche di due circonferenze	390
Lunghezza di una circonferenza	391
Lunghezza di un arco di circonferenza	392
Area di un cerchio	393
Area di un settore circolare	393
Poligoni inscritti in una circonferenza	394
Poligoni circoscritti a una circonferenza	395
Poligoni di tre lati circoscrivibili	395
Poligoni regolari	396
Formula dell'area di un poligono circoscritto a una circonferenza	396
Raggio della circonferenza inscritta e circoscritta a un triangolo	397
<b>10.2 Geometria solida</b>	398
Punti, rette, piani	398
Posizioni reciproche di due rette nello spazio	398
Posizioni reciproche di una retta e di un piano	398
Posizioni reciproche di due piani nello spazio	400
Diedri	401
Poliedro	402
AREA DELLA SUPERFICIE E VOLUME DI UN POLIEDRO	402
Prisma retto	403
AREA E VOLUME DI UN PRISMA RETTO	404
Parallelepipedo	405
AREA E VOLUME DI UN PARALLELEPIPEDO RETTANGOLO	406
Cubo	406
AREA E VOLUME DI UN CUBO	407
Piramide retta	407
AREA E VOLUME DI UNA PIRAMIDE RETTA	408

<b>10.3</b>	<b>Solidi di rotazione</b>	409
	Cilindro	409
	AREA E VOLUME DI UN CILINDRO	410
	Cono	411
	AREA E VOLUME DI UN CONO	412
	Sfera	413
	AREA E VOLUME DI UNA SFERA	413
	Verifica delle abilità	414
	Verso la prova INVALSI	452
<b>11</b>	<b>Elementi di Trigonometria</b>	457
<b>11.1</b>	<b>Le funzioni goniometriche</b>	457
	Misura degli angoli: sistema sessagesimale	457
	La circonferenza goniometrica	458
	Funzioni goniometriche	458
	Variazioni delle funzioni goniometriche	459
	Rappresentazione grafica delle funzioni goniometriche seno, coseno, tangente	461
	Uso della calcolatrice scientifica	462
	Triangoli rettangoli	463
	RIEPILOGO	465
	Mappa	466
	Verifica delle abilità	467
<b>12</b>	<b>Cenni di matematica finanziaria</b>	468
<b>12.1</b>	<b>Matematica finanziaria</b>	468
	Operazioni di prestito	468
	Operazioni di sconto	469
	Mappa	471
	Verifica delle abilità	472
	Come utilizzare il coupon per scaricare la versione digitale del libro	474
	Come utilizzare il coupon per scaricare i contenuti digitali integrativi	474

# Presentazione

Il libro si presenta come uno strumento agevole per l'apprendimento dei temi di matematica del biennio di un **corso di Istruzione e Formazione Professionale**. Il linguaggio utilizzato presenta in modo chiaro anche i contenuti concettualmente più impegnativi e, seppur semplice e scorrevole, risulta nel contempo rigoroso, tipico della disciplina.

I capitoli sono così strutturati:

- breve introduzione di un nuovo argomento;
- esercizio svolto, per meglio apprendere la parte teorica;
- mappa concettuale, per sintetizzare i concetti e le procedure fondamentali e per agevolare l'apprendimento degli studenti con bisogni educativi speciali;
- esercizi proposti strutturati in funzione del loro grado di difficoltà, da svolgere in modo autonomo, identificati come “verifica delle abilità”;
- esercizi proposti, da svolgere in modo autonomo, scritti con font ad alta leggibilità, per agevolare gli allievi con disturbi specifici dell'apprendimento.

A partire dai primi capitoli, la teoria si sviluppa in modo peculiare, anche per permettere di iniziare agevolmente il percorso nella secondaria di secondo grado agli studenti bisognosi di ripassare le nozioni studiate nelle scuole di primo grado.

Definizioni, proprietà, teoremi, osservazioni, regole e suggerimenti sono evidenziati all'interno di box colorati.

In fondo ai capitoli sono inserite delle mappe inclusive, utili quindi a tutti gli studenti, non solo a quelli con bisogni educativi speciali.

Le nozioni fondamentali e le verifiche delle abilità sono scritte con font ad alta leggibilità, al fine di abbattere le barriere di ostacolo all'accesso e alla comprensione dei contenuti. La proposta di esercizi è ricca e costituisce parte integrante della trattazione. Dopo ogni nuovo concetto, definizione, proprietà è presente un box colorato al cui interno ogni passaggio è spiegato passo passo. Gli esercizi proposti sono presentati in funzione del loro grado di difficoltà. Un puntino colorato accanto al numero indica un esercizio di difficoltà mag-

giore rispetto a quello senza contrassegno; due puntini indicano gli esercizi più impegnativi. La gradualità consente non solo di accompagnare l'allievo ad apprendere con agevolezza i contenuti, ma anche di consolidare quanto appreso.

Alcuni capitoli contengono la sezione Verso la prova INVALSI che consente agli allievi di prendere confidenza con la tipologia di esercizi somministrata a livello nazionale.

La *Guida per il docente* raccoglie riferimenti normativi, utili informazioni su diverse metodologie da adottare nella didattica di tutti i giorni, utili suggerimenti e spunti relativi alla didattica per studenti con bisogni educativi speciali, tutte le soluzioni degli esercizi, una sezione di aiuto per studenti con disturbi specifici dell'apprendimento, delle verifiche di abilità su ogni capitolo.

# L'OFFERTA DIDATTICA HOEPLI

L'edizione **Openschool** Hoepli offre a docenti e studenti tutte le potenzialità di Openschool Network (ON), il nuovo sistema integrato di contenuti e servizi per l'apprendimento.

## Edizione OPENSCHOOL



### LIBRO DI TESTO



Il libro di testo è l'**elemento cardine** dell'offerta formativa, uno strumento didattico **agile** e **completo**, utilizzabile **autonomamente** o in combinazione con il ricco **corredo digitale** offline e online. Secondo le più recenti indicazioni ministeriali, volume cartaceo e apparati digitali **sono integrati in un unico percorso didattico**. Le espansioni accessibili attraverso l'eBook+ e i materiali integrativi disponibili nel sito dell'editore sono puntualmente richiamati nel testo tramite apposite icone.

### eBOOK+



L'**eBook+** è la versione digitale e interattiva del libro di testo, utilizzabile su **tablet, LIM e computer**. Aiuta a comprendere e ad approfondire i contenuti, rendendo l'apprendimento più attivo e coinvolgente. Consente di leggere, annotare, sottolineare, effettuare ricerche e accedere direttamente alle numerose **risorse digitali integrative**.  
→ Scaricare l'eBook+ è molto **semplice**. È sufficiente seguire le istruzioni riportate nell'ultima pagina di questo volume.

### RISORSE ONLINE



Il sito della casa editrice offre una ricca dotazione di **risorse digitali** per l'approfondimento e l'aggiornamento. Nella pagina web dedicata al testo è disponibile **my BookBox**, il contenitore virtuale che raccoglie i materiali integrativi che accompagnano l'opera.  
→ Per accedere ai materiali è sufficiente registrarsi al sito **www.hoepliscuola.it** e inserire il codice coupon che si trova nell'ultima pagina di questo volume. **Per il docente** nel sito sono previste ulteriori risorse didattiche dedicate.

### PIATTAFORMA DIDATTICA



La **piattaforma didattica** è un ambiente digitale che può essere utilizzato in modo duttile, a misura delle esigenze della classe e degli studenti. Permette in particolare di **condividere contenuti ed esercizi** e di partecipare a **classi virtuali**. Ogni attività svolta viene salvata sul **cloud** e rimane sempre disponibile e aggiornata. La piattaforma consente inoltre di consultare la versione online degli eBook+ presenti nella propria libreria.  
→ È possibile accedere alla piattaforma attraverso il sito **www.hoepliscuola.it**.



## 1.1 Gli insiemi e i simboli



Gli abiti contenuti in un armadio, i numeri naturali, gli oggetti contenuti in un astuccio, i nomi degli studenti di una classe sono **insiemi**.

Gli insiemi si indicano solitamente con lettere maiuscole dell'alfabeto latino:  $A, B, C, \dots$  e i loro elementi con minuscole:  $a, b, c, \dots$ . Per indicare che  $x$  è uno degli elementi di un certo insieme  $Y$ , si scrive:  $x \in Y$  e si legge:  $x$  appartiene all'insieme  $Y$ ; se  $x$  non è un elemento di  $Y$ , si scrive:  $x \notin Y$  e si legge:  $x$  non appartiene all'insieme  $Y$ . Non tutti gli insiemi contengono elementi.



### DEFINIZIONE

Un insieme che non possiede elementi si dice **vuoto** e si indica con il simbolo  $\emptyset$ .



### ESERCIZI SVOLTI

L'insieme dei voti insufficienti della pagella di fine anno di uno studente ammesso alla classe successiva è un insieme vuoto.

## 1.2 Rappresentazione di un insieme

Un insieme si può rappresentare mediante:

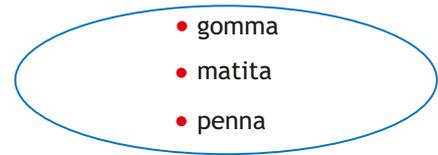
- **elencazione**, scrivendo uno di seguito all'altro i suoi elementi tra due parentesi graffe

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

- **proprietà caratteristica**, specificando tra due parentesi graffe la proprietà che caratterizza i suoi elementi

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq 50\} \text{ è l'insieme dei numeri naturali minori o uguali a } 50 \text{ (dove la barra } | \text{ si legge tale/i che)}$$

- graficamente, mediante i **diagrammi di Eulero-Venn** ovvero con linee chiuse entro le quali si racchiudono gli elementi dell'insieme



## 1.3 Insiemi finiti, infiniti



### DEFINIZIONE

Se gli elementi di un insieme si possono contare e il conteggio ha termine, l'insieme si dice **finito**; altrimenti si dice **infinito**.

L'insieme dei numeri naturali è infinito.

L'insieme dei numeri naturali compresi tra 2 e 8 è un insieme finito.

Se tutti gli elementi di un insieme  $A$  sono anche elementi di un insieme  $B$  e, viceversa, tutti gli elementi di  $B$  sono anche elementi di  $A$ , allora  $A$  e  $B$  si dicono **uguali**. In simboli:  $A = B$ .

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  e  $X = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq 5\}$  sono uguali.

Se due insiemi  $A$  e  $B$  non sono uguali, si scrive:  $A \neq B$ .

Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , se ogni elemento di  $A$  è anche elemento di  $B$  e  $B$  contiene almeno un elemento che non appartiene ad  $A$ , allora  $A$  è un **sottoinsieme proprio** dell'insieme  $B$ .

$A = \{0, 1, 2\}$  è un sottoinsieme proprio di  $B = \{0, 1, 2, 3\}$ .  
 $B$ , infatti, contiene l'elemento 3 che non appartiene ad  $A$ .

Con  $A \subseteq B$  si intende esprimere che  $A$  è un sottoinsieme improprio di  $B$ , ossia che  $A$  può essere un sottoinsieme proprio di  $B$  o coincidere con  $B$ .

Ogni insieme è sottoinsieme improprio di se stesso.

L'insieme vuoto è sottoinsieme improprio di qualsiasi altro insieme.

## 1.4 L'insieme universo

Quando si rappresenta un insieme mediante la sua proprietà caratteristica, è opportuno specificare la natura dei suoi elementi.



### DEFINIZIONE

L'insieme **universo**  $U$  di un dato insieme  $A$  è l'insieme al quale appartengono gli elementi di  $A$  per la loro tipologia.

- Se  $X = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 3\}$ , allora  $U = \mathbb{N}$  e  $X = \{1, 2\}$ .
- Se  $A = \{a \in \mathbb{N} \mid x > 2\}$ , allora  $U = \mathbb{N}$  e  $A = \{3, 4, 5, 6, \dots\}$ .
- Se  $B = \{b \in \mathbb{N} \mid b < 2\}$ , allora  $U = \mathbb{N}$  e  $B = \{0, 1\}$ .

## 1.5 Le operazioni tra insiemi e loro proprietà

### Intersezione



#### DEFINIZIONE

L'**intersezione** di due insiemi non vuoti  $A$  e  $B$  è l'insieme costituito dagli elementi che appartengono sia ad  $A$  che a  $B$ .

L'insieme intersezione di  $A$  e  $B$  si indica con  $A \cap B$ .

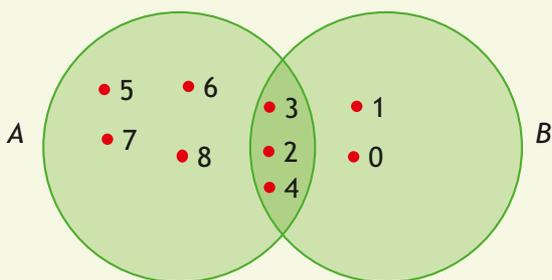
La definizione di intersezione si estende anche al caso in cui gli insiemi siano più di due.

Se  $A = \{1, 3, 5\}$  e  $B = \{0, 1, 2\}$ , allora  $A \cap B = \{1\}$



#### ESERCIZI SVOLTI

$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$   
 $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

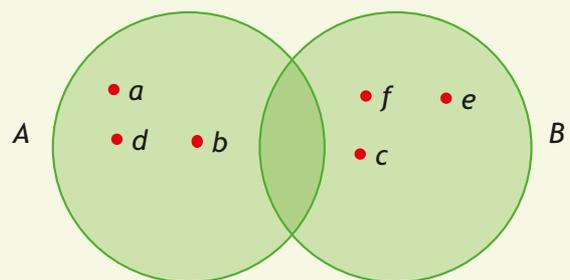


Per calcolare l'intersezione tra  $A$  e  $B$ : prendere in considerazione ogni elemento di  $A$  e valutare se è anche elemento di  $B$ .

Il 2, il 3 e il 4 sono elementi di  $A$  che appartengono anche a  $B$ :

$$A \cap B = \{2, 3, 4\}$$

$A = \{a, b, d\}$   
 $B = \{c, e, f\}$



Non ci sono elementi comuni ai due insiemi pertanto l'intersezione è vuota:

$$A \cap B = \{\} = \emptyset$$

## Unione



### DEFINIZIONE

L'**unione** di due insiemi  $A$  e  $B$ , di cui almeno uno non vuoto, è l'insieme costituito dagli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi  $A$  e  $B$ .

L'insieme unione di due insiemi  $A$  e  $B$  si indica con  $A \cup B$ .

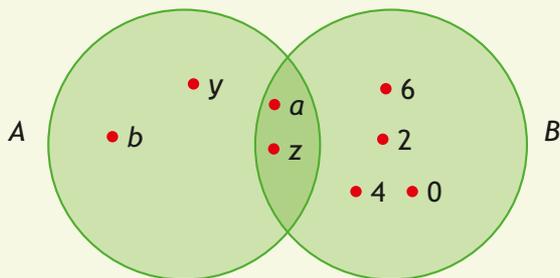
La definizione di unione si estende anche al caso in cui gli insiemi siano più di due.

Se  $A = \{1,3,5\}$  e  $B = \{0,1,2\}$ , allora  $A \cup B = \{0,1,2,3,5\}$



### ESERCIZI SVOLTI

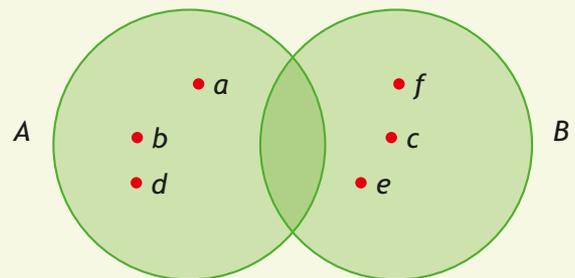
$A = \{a,b,y,z\}$   
 $B = \{a,0,2,4,6,z\}$



Per calcolare l'unione tra  $A$  e  $B$ : prendere in considerazione ogni elemento di  $A$  e ogni elemento di  $B$ . Gli elementi comuni  $a$  e  $z$  non devono essere ripetuti:

$A \cup B = \{a,b,y,z,0,2,4,6\}$

$A = \{a,b,d\}$   
 $B = \{c,e,f\}$



L'unione tra  $A$  e  $B$  è costituita da tutti gli elementi di  $A$  e da tutti gli elementi di  $B$ :

$A \cup B = \{a,b,c,d,e,f\}$

## Differenza



### DEFINIZIONE

La **differenza** di due insiemi  $A$  e  $B$  non vuoti è l'insieme costituito dagli elementi che appartengono al primo insieme  $A$  e che non appartengono al secondo insieme  $B$ . L'insieme differenza tra  $A$  e  $B$  si indica con  $A - B$ .

Se  $A = \{1,3,5\}$  e  $B = \{0,1,2\}$ , allora  $A - B = \{3,5\}$



### ESERCIZI SVOLTI

Se  $A = \{a,b,c\}$  e  $B = \{a,c,y,z\}$ , allora per calcolare:

- la differenza tra  $A$  e  $B$ , eliminare da  $A$  gli elementi che appartengono a  $B$ :  
 $A - B = \{a,b,c\} = \{b\}$
- la differenza tra  $B$  ed  $A$ , eliminare da  $B$  gli elementi che appartengono ad  $A$ :  $B - A = \{a,c,y,z\} = \{y,z\}$ .

## Insieme complementare



### DEFINIZIONE

Il **complementare** di un insieme  $B$  rispetto a un insieme  $A$  che lo contiene, suo insieme universo, è l'insieme degli elementi che appartengono ad  $A$  e non appartengono a  $B$ .

L'insieme complementare di  $B$  rispetto all'insieme  $A$  si indica con  $C_A B$ .

Se  $A = \{1,3,5\}$  e  $B = \{3\}$ , allora  $C_A B = \{1,5\}$



### ESERCIZI SVOLTI

Se  $M = \{l,m,n,o\}$  e  $N = \{i,l,m,n,o,p\}$ , per calcolare il complementare di  $M$  rispetto a  $N$ , insieme che lo contiene: eliminare da  $N$  gli elementi che appartengono ad  $M$ :  $C_N M = \{i,l,m,n,o,p\} = \{i,p\}$ .

## Prodotto cartesiano



### DEFINIZIONE

Il **prodotto cartesiano** di due insiemi non vuoti  $A$  e  $B$  è l'insieme delle coppie ordinate in cui il primo elemento appartiene al primo insieme  $A$  e il secondo appartiene al secondo insieme  $B$ .

L'insieme prodotto cartesiano di  $A$  per  $B$  si indica con  $A \times B$ .

Se  $A = \{a,b\}$  e  $B = \{a,x,y\}$ , l'insieme prodotto cartesiano  $A \times B$  può essere rappresentato mediante:

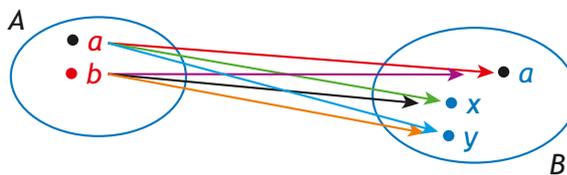
- elencazione

$$A \times B = \{(a;a), (a;x), (a;y), (b;a), (b;x), (b;y)\}$$

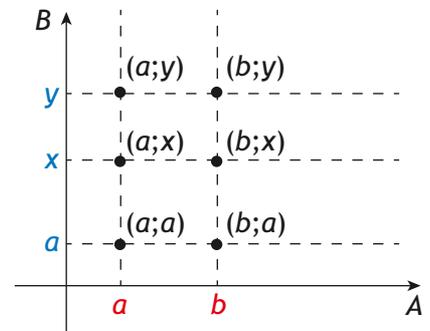
- una tabella a doppia entrata, in cui la prima colonna contiene gli elementi di  $A$ , la prima riga contiene quelli di  $B$  e le caselle d'incrocio contengono le coppie ordinate

	$B$	$a$	$x$	$y$
$A$				
$a$		$(a;a)$	$(a;x)$	$(a;y)$
$b$		$(b;a)$	$(b;x)$	$(b;y)$

- un diagramma a frecce (questa rappresentazione è anche detta sagittale), rappresentando i due insiemi  $A$  e  $B$  con i diagrammi di Eulero-Venn e collegando mediante frecce gli elementi che si corrispondono nelle coppie ordinate (facendo partire da ogni elemento di  $A$  una freccia che culmina nell'elemento di  $B$  con cui forma una coppia)



- un diagramma cartesiano, seguendo i seguenti passi:
  - tracciando due rette perpendicolari, dette assi cartesiani;
  - rappresentando sul semiasse orizzontale gli elementi del primo insieme e su quello verticale gli elementi del secondo insieme;
  - tracciando delle rette parallele agli assi per i punti che rappresentano gli elementi dei due insiemi.



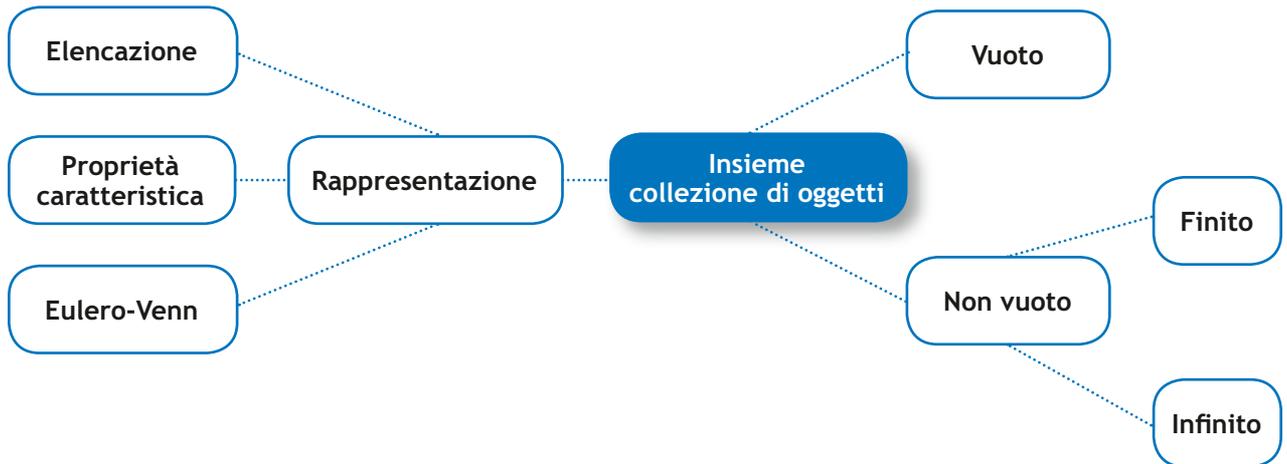
I punti di intersezione delle parallele rappresentano le coppie ordinate del prodotto cartesiano.



### ESERCIZI SVOLTI

- Se  $A = \{1,2,3\}$  e  $B = \{1,4\}$ , allora  $A \times B = \{(1;1), (1;4), (2;1), (2;4), (3;1), (3;4)\}$
- Se  $A = \{0,1\}$  e  $B = \{1\}$ , allora  $A \times B = \{(0;1), (1;1)\}$
- Se  $M = \{a;b\}$  e  $C = \{a;d\}$ , allora  $M \times C = \{(a;a), (a;d), (b;a), (b;d)\}$
- Se  $P = \{x\}$  e  $Q = \{x;y\}$ , allora  $P \times Q = \{(x;x), (x;y)\}$

# Mappa



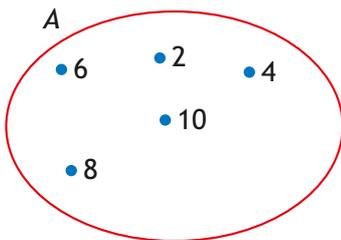
# Verifica delle abilità

Completare con  $\in$ ,  $\notin$ ,  $\subseteq$ ,  $=$ ,  $\neq$ .

1.  $-1 \dots N$
2.  $12 \dots N$
3.  $\{0,1,2\} \dots N$
4.  $\{n \in N \mid n < 6\} \dots \{0,1,2,3,4,5\}$
5.  $\{n \in N \mid n < 5\} \dots \{0,1,2,3,4,5\}$

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

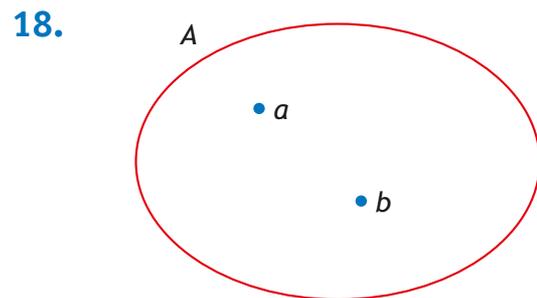
6. L'insieme  $X$  delle lettere della parola *manta* è sottoinsieme dell'insieme  $Y$  delle lettere della parola *mantello*.
7. L'insieme  $A$  delle lettere della parola *scarpa* è sottoinsieme dell'insieme  $B$  delle lettere della parola *carpa*.
8.  $A = \{n \in N \mid n \text{ è multiplo di } 2\}$  e  $B = \{n \in N \mid n \text{ è pari}\}$  non sono uguali.
9. L'insieme  $S = \{g,i,l\}$  è sottoinsieme dell'insieme  $A = \{a \mid a \text{ è una lettera della parola } \textit{giocoliere}\}$ .
10. L'insieme



è sottoinsieme dell'insieme  $B$  dei divisori di 120.

Rappresentare mediante elencazione i seguenti insiemi.

11.  $Z = \{z \mid z \text{ è una lettera della parola } \textit{mamma}\}$
12.  $A = \{a \mid a \text{ è una vocale della parola } \textit{mamma}\}$
13.  $V = \{v \mid v \text{ è una consonante della parola } \textit{mamma}\}$
14.  $Y = \{y \mid y \text{ è una vocale dell'alfabeto italiano non contenuta nella parola } \textit{aiuole}\}$
15.  $A = \{a \in N \mid a < 10\}$
16.  $C = \{c \in N \mid 4 < c < 10\}$
17.  $X = \{x \mid x \text{ è l'insieme delle iniziali dei nomi: Anna, Giulia, Francesca, Giovanni, Ugo}\}$



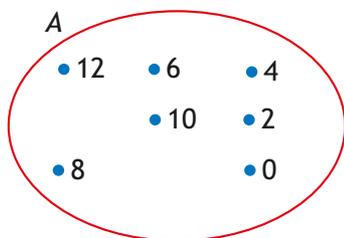
Rappresentare mediante proprietà caratteristica e mediante i diagrammi di Eulero-Venn i seguenti insiemi.

19.  $A = \{a, e, i, o, u\}$
20.  $B = \{1, 2, 5, 10\}$

**Individuare la risposta giusta tra quelle proposte.**

- 21.**  $\{a, e, i, o, l, n, q, u\}$  è la rappresentazione o per elencazione dell'insieme costituito dalle lettere della parola:
- a.** qualunque      **b.** aquilone  
**c.** alquanto      **d.** qualunque
- 22.** Se  $A = \{a, e, i\}$ , allora l'insieme universo di  $A$  è:
- a.** l'insieme delle vocali dell'alfabeto italiano  
**b.** l'insieme dei numeri naturali  
**c.** l'insieme delle consonanti dell'alfabeto italiano  
**d.** l'insieme dei numeri
- 23.**  $\{p, s, t\}$  è la rappresentazione per elencazione dell'insieme costituito dalle consonanti della parola:
- a.** questione      **b.** pistone  
**c.** pistola      **d.** pasta

**24.**

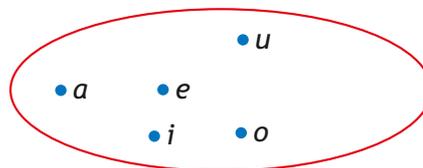


è la rappresentazione dell'insieme:

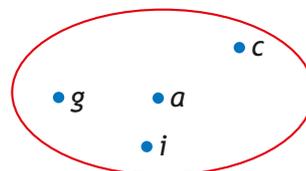
- a.**  $A = \{n \in N \mid n \text{ è pari}\}$   
**b.**  $A = \{n \in N \mid n \text{ è minore di } 13\}$   
**c.**  $A = \{n \in N \mid n \text{ è multiplo di } 2 \text{ ma non di } 4\}$   
**d.**  $A = \{n \in N \mid n \text{ è multiplo di } 2 \text{ e minore di } 14\}$
- 25.**  $\{a, c, p\}$  è l'insieme delle:
- a.** lettere della parola *pace*  
**b.** vocali della parola *pace*  
**c.** lettere della parola *cappa*  
**d.** vocali della parola *cappa*

**Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false.**

- 26.** La rappresentazione dell'insieme  $\{aiuole\}$  mediante un diagramma di Eulero-Venn è:



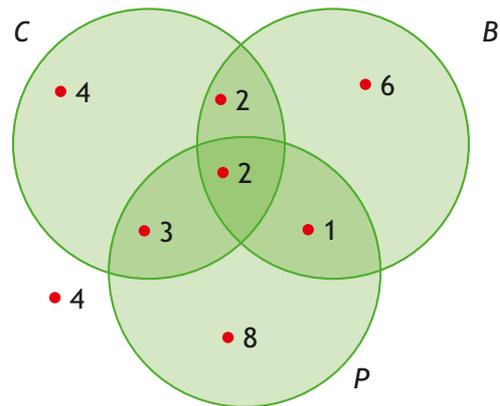
- 27.** Il seguente diagramma rappresenta l'insieme  $G$  delle lettere della parola *giacca*.



**Individuare la risposta giusta tra quelle proposte.**

- 28.** L'unione tra l'insieme delle lettere della parola *insufficienza* e l'insieme delle lettere della parola *sufficienza* è uguale all'insieme:
- a.**  $\{i, n, s, u, f, f, i, c, i, e, n, z, a, s, u, f, f, i, c, i, e, n, z, a\}$   
**b.**  $\{i, n, s, u, f, f, i, c, i, e, n, z, a\}$   
**c.**  $\{s, u, f, f, i, c, i, e, n, z, a\}$   
**d.**  $\{a, c, e, f, i, n, s, u, z\}$
- 29.** La differenza tra l'insieme delle vocali della parola *gradino* e l'insieme delle vocali della parola *giardino* è uguale all'insieme:
- a.**  $\{e\}$       **b.**  $\{a, i, d\}$   
**c.**  $\{a, i, o\}$       **d.**  $\emptyset$
- 30.** L'intersezione tra l'insieme delle lettere della parola *giglio* e l'insieme delle lettere della parola *gorgoglio* è uguale all'insieme:
- a.**  $\{g, i, g, l, i, o\}$       **b.**  $\{g, o\}$   
**c.**  $\{g, i, l, o\}$       **d.**  $\{g, o, r, g, o, g, l, i, o\}$

- 31. L'insieme unione tra l'insieme delle lettere della parola *camomilla* e l'insieme  $\{\text{camomilla}\}$  è uguale all'insieme:
- vuoto
  - $\{\text{camomilla}\}$
  - $\{c, a, m, o, m, i, l, l, a\}$
  - $\{a, c, i, l, m, o, \text{camomilla}\}$
- 32. Dati gli insiemi  $A = \{1, 7\}$ ,  $B = \{x \in N \mid x \leq 5\}$  e  $C = \{1, 2, 3\}$ , calcolare:
- $A \cap B$
  - $A \cup B$
  - $B \cap C$
  - $B \cup C$
  - $(A \cap B) \cap C$
  - $(A \cup B) \cup C$
  - $A - B$
  - $B - A$
  - $(A - B) \cup C$
- 33. Dati gli insiemi  $A = \{a \mid a \text{ è una lettera della parola } \textit{orco}\}$ ,  $B = \{b \mid b \text{ è una lettera della parola } \textit{olio}\}$ , calcolare:
- $A \times B$
  - $B - A$
- 34. La differenza tra l'insieme delle lettere della parola *finestra* e l'insieme delle lettere della parola *estro* è uguale all'insieme:
- $\{a, e, f, i, n, o, r, s, t\}$
  - $\{e, r, s, t\}$
  - $\{a, f, i, n\}$
  - $\{f, i, n, e, s, t, r, a, e, s, t, r, o\}$
- 35. Se  $C$  indica l'insieme delle persone di un gruppo che giocano a calcio,  $B$  l'insieme delle persone di un gruppo che giocano a basket e  $P$  l'insieme delle persone di un gruppo che giocano a pallavolo, calcolare il numero delle persone che:
- non praticano nessuno dei tre sport;
  - giocano a calcio;
  - giocano a calcio, ma non a basket;
  - giocano sia a basket che a pallavolo;
  - giocano sia a calcio che a pallavolo;
  - giocano sia a basket che a pallavolo, ma non a calcio.



- 36. In una classe di 28 studenti, 9 sciano e 11 giocano a calcio. Sapendo che 5 praticano entrambi gli sport, quanti studenti non fanno attività sportiva?
- 37. In una classe di 23 studenti, 7 giocano a calcio e 8 praticano nuoto. Sapendo che 3 praticano entrambi gli sport, quanti studenti non fanno attività sportiva?
- 38. Un gruppo di 20 persone partecipa a una gita a Venezia. Alcuni visitano anche Murano; altri Burano. Sapendo che 11 visitano Burano e 4 sia Murano che Burano, quanti visitano solo Venezia?
- 39. Da un'indagine sulla lettura preferita dai condomini di uno stesso stabile negli ultimi sei mesi, è emerso che 20 di loro hanno letto gialli, 24 romanzi, 15 fumetti. Sapendo che un condomino non ha letto niente, 5 hanno letto solo gialli e romanzi, 7 solo gialli e fumetti, 11 solo gialli, 4 hanno letto sia romanzi che fumetti e 3 gialli, romanzi e fumetti, calcolare quanti condomini:
- hanno letto solo romanzi;
  - hanno letto solo fumetti;
  - hanno letto sia romanzi che fumetti;
  - hanno letto gialli o fumetti, ma non romanzi;
  - hanno letto sia gialli che fumetti, ma non romanzi.

# Verso la prova INVALSI

## 1. INVALSI 2015/16

Nelle classi prime di una scuola ci sono 100 studenti. Tutti studiano almeno una lingua straniera.

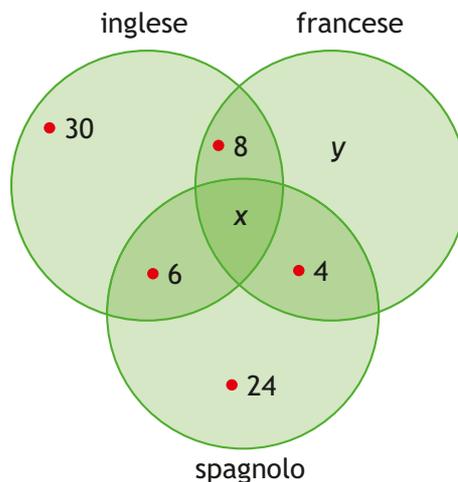
40 studiano spagnolo

8 studiano solo l'inglese e il francese

6 studiano solo l'inglese e lo spagnolo

4 studiano solo il francese e lo spagnolo

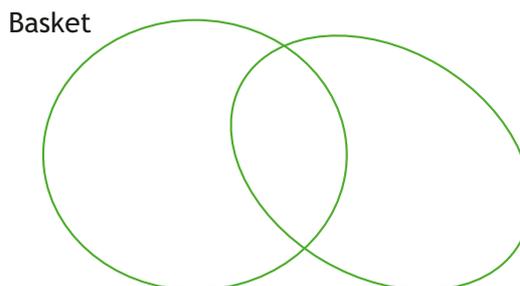
- a. Il numero  $x$  di studenti che studiano tutte e tre le lingue è .....  
Il numero  $y$  di studenti che studiano solo il francese è .....



## 2. INVALSI 2013/14

Su 100 alunni di una scuola, 82 alunni si interessano di calcio, 26 si interessano di basket, 10 non si interessano né di calcio, né di basket.

Scrivi nella opportuna zona del seguente diagramma il numero di studenti che si interessano sia di calcio sia di basket.



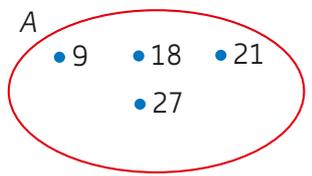
# Verifica delle abilità

Completare con  $\in$ ,  $\notin$ ,  $\subseteq$ .

- 1.  $-5 \dots N$
- 2.  $3 \dots N$
- 3.  $0 \dots N$
- 4.  $\{1,2\} \dots N$
- 5.  $\frac{1}{2} \dots N$
- 6.  $\{0\} \dots N$

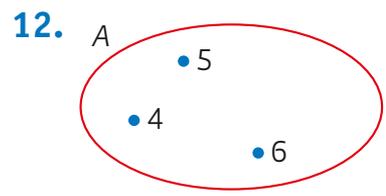
Vero o falso?

- 7. L'insieme  $C = \{g,i,o\}$  è sottoinsieme dell'insieme  $A = \{a \mid a \text{ è una lettera della parola } \textit{aglio}\}$ .
- 8. L'insieme  $B = \{c,g,i,l,o,s\}$  è sottoinsieme dell'insieme  $C = \{c \mid c \text{ è una lettera della parola } \textit{scaglia}\}$ .
- 9. L'insieme

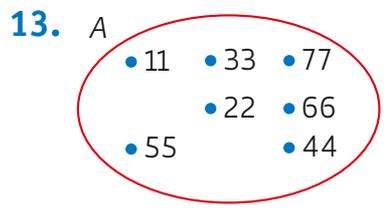


è sottoinsieme dell'insieme  $B$  dei multipli di 9.

- 10.  $B = \{b \mid b \text{ è una consonante della parola } \textit{scolastica}\}$  può essere rappresentato per elencazione con l'insieme  $B = \{c,l,s,t\}$ .
- 11.  $A = \{a \in N \mid a < 5\}$  può essere rappresentato per elencazione con l'insieme  $A = \{1,2,3,4\}$ .



indica che  $A = \{a \in N \mid 4 < a < 6\}$ .



è la rappresentazione dell'insieme:  
 $A = \{11,22,33,44,55,66,77\}$ .

- 14. Se  $A = \{3,4,5\}$ ,  $B = \{x \in N \mid 1 < x < 5\}$  e  $C = \{0,1\}$ , allora:
  - $(A \cup B) \cap C = \emptyset$
  - $(B - A) \cup C = C$
- 15. Se  $A = \{a \mid a \text{ è una lettera della parola } \textit{aia}\}$ ,  $B = \{b \mid b \text{ è una vocale della parola } \textit{bue}\}$ , allora  
 $A \times B = \{a,e,i,u\}$ .

Individuare la risposta giusta tra le proposte.

- 16. L'unione tra l'insieme delle lettere della parola *finestra* e l'insieme delle lettere della parola *estro* è uguale all'insieme:
  - a.  $\{a,e,f,i,n,o,r,s,t\}$
  - b.  $\{e,r,s,t\}$
  - c.  $\{a,f,i,n\}$
  - d.  $\{f,i,n,e,s,t,r,a,e,s,t,r,o\}$
- 17. L'intersezione tra l'insieme delle lettere della parola *finestra* e l'insieme delle lettere della parola *estro* è uguale all'insieme:
  - a.  $\{a,e,f,i,n,o,r,s,t\}$
  - b.  $\{e,r,s,t\}$
  - c.  $\{a,f,i,n\}$
  - d.  $\{f,i,n,e,s,t,r,a,e,s,t,r,o\}$